

www.matematiklæreren.dk

Formelsamling C-niveau

Juni 2014

Indhold

1	Tal og Regnearter	3
1.1	Regnearternes hierarki	3
1.1.1	Regneregler	3
1.2	Parenteser	3
1.2.1	Gange ind i parentes	4
1.2.2	Gange to parenteser med hinanden	4
1.3	Kvadratsætningerne	4
1.3.1	Kvadratsætninger og ligningsløsning	5
1.4	Brøker	5
1.4.1	Brøkers størrelse	5
1.5	Forlænge og forkorte brøker	6
1.6	Addition og subtraktion af brøker	6
1.7	Multiplikation og division med brøker	7
1.8	Potenser	8
1.8.1	Oversigt	8
1.9	Kvadratrødder og andre rødder	8
1.9.1	Regneregler for rødder	8
2	Ligninger	10
2.0.1	Løsning af ligninger	10
2.0.2	Ligninger af højere grad	10
2.1	To ligninger med to ubekendte	11
2.1.1	Substitution	11
2.1.2	Lige store koefficienters metode	12
2.1.3	Determinant-metoden	13
2.2	Grafisk løsning af to ligninger med to ubekendte	16
2.3	Numeriske ligninger	19
2.4	Andengradsligningen	19
2.5	Uligheder	20
2.5.1	Regneregler for uligheder	20
2.5.2	Ulighedstegn og intervaller	21
3	Funktioner	22
3.1	Koordinatsystemet	22
3.2	Lineære funktioner	23
3.3	Find a og b (lineær)	25
3.4	Renteformlen	25
3.5	Eksponentiel udvikling	26
3.5.1	Find x og y	27
3.6	Find a og b (eksponentiel)	28
3.7	Fordoblings- og halveringskonstant	28
3.7.1	Halveringskonstant	29
3.8	Potensfunktioner	30
3.8.1	Betydningen af a	31
3.8.2	Betydning af b	32
3.8.3	Grafen	32
3.8.4	Find x og y	33
3.9	Find a og b (potens)	34

3.10	Logaritmer	34
3.10.1	Logaritmeregneregler	35
3.10.2	Den naturlige logaritme og andre logaritmer	35

1 Tal og Regnearter

1.1 Regnearternes hierarki

Når man skal regne på et udtryk, hvor der er flere forskellige regnearter involveret, er det ikke lige meget, i hvilken rækkefølge man udfører udregningerne.

Hierarkiet er som følger

1. rødder og potenser
2. multiplikation (gange) og division
3. addition (plus) og subtraktion (minus)

1.1.1 Regneregler

$$a + (-b) = a - b$$

$$a - (-b) = a + b$$

$$a - (b + c) = a - b - c$$

$$(-a) \cdot b = -ab$$

$$(-a) \cdot (-b) = ab$$

$$\frac{-a}{-b} = c$$

$$\frac{-a}{b} = -c$$

$$\frac{a}{-b} = -c$$

1.2 Parenteser

Når man vil afvige fra det almindelige hierarki hos regnearterne, bruger man parenteser.

1.2.1 Gange ind i parentes

Når man skal gange ind i en parentes, bruger man den distributive lov, der siger, at

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Et eksempel kunne være

$$5 \cdot (2 + x) = 5 \cdot 2 + 5 \cdot x = 10 + 5x$$

Når man ganger ind i parentesen, skal man gange tallet på hvert *led*, altså på hver ting, der er adskilt af et plus eller minus.

$$\begin{aligned} & 2 \cdot (5 + 4 - 3 \cdot x + 8 \cdot y) \\ &= 2 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot (-3 \cdot x) + 2 \cdot 8 \cdot y \\ &= 10 + 8 - 6x + 16y \end{aligned}$$

Bemærk, at når vi har et produkt (noget, der er ganget sammen), så skal man kun gange på én gang og ikke på hver faktor i produktet.

1.2.2 Gange to parenteser med hinanden

Når man ganger to parenteser med hinanden, så skal man gange hvert tal fra den første parentes ind i den anden.

$$(a + b)(x + y) = \underbrace{a \cdot x + a \cdot y}_{a \text{ ganget ind}} + \underbrace{b \cdot x + b \cdot y}_{b \text{ ganget ind}} = ax + ay + bx + by$$

1.3 Kvadratsætningerne

Kvadratsætningerne bruger man ofte, når man skal reducere udtryk. De omhandler, hvad der sker, når man ganger to parenteser med hinanden, der indeholder de samme tal.

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

1.3.1 Kvadratsætninger og ligningsløsning

Man kan nogle gange løse ligninger ved at bruge kvadratsætningerne.
Hvis man f.eks. har ligningen

$$x^2 + 9 = 6x$$

Kan man starte med at rykke 6x hen på den anden side af lighedstegnet

$$x^2 + 9 - 6x = 0$$

så kan man regne på venstresiden

$$x^2 + 9 - 6x = x^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot x$$

og så kan vi bruge den anden kvadratsætning ”baglæns” til at samle udtrykket

$$x^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot x = (x - 3)^2$$

Nu er vores ligning

$$(x - 3)^2 = 0$$

og for at venstresiden giver 0, skal x tydeligvis være 3.
Altså er løsningen $x=3$.

1.4 Brøker

En brøk er en division, som man ikke har regnet helt ud. F.eks.

$$\frac{2}{7}$$

Tallet under brøkstregen kaldes nævneren, og tallet over brøkstregen kaldes tælleren. Regner man brøken ud, kaldes resultatet for kvotienten.

$$\frac{\text{Tæller}}{\text{Nævner}} = \text{Kvotient}$$

Det er vigtigt, at nævneren aldrig giver 0. (Hvordan skulle det give mening at dele noget i 0 stykker?)

1.4.1 Brøkers størrelse

Det er tydeligt, at $1/8$ er mindre end $1/4$. Det vil altid være sådan, at jo større nævneren bliver, des mindre bliver kvotienten.

$$\text{Hvis } m > n \text{ så er } \frac{1}{m} < \frac{1}{n}$$

En brøk der har samme tæller og nævner, har altid kvotient 1

$$\frac{8}{8} = 1$$

$$\frac{4}{4} = 1$$

$$\frac{n}{n} = 1, n \neq 0$$

1.5 Forlænge og forkorte brøker

Når man regner med brøker, kan det ofte være praktisk at omforme dem.

Hvis man vil have et større tal i tæller eller nævner, kan man forlænge brøken. Det gør man ved at gange det samme tal på i tæller og nævner.

Brøkens værdi er altså uændret, når vi forlænger den.
Generelt har vi reglen

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}, \quad k \neq 0$$

Hvis vi derimod ønsker at gøre tælleren eller nævneren mindre, kan vi forkorte brøken. Dette gøres ved at dividere med det samme tal i både tæller og nævner. Generelt kan vi skrive reglen som

$$\frac{a}{b} = \frac{a : k}{b : k}, \quad k \neq 0$$

1.6 Addition og subtraktion af brøker

For at kunne addere eller subtrahere brøker skal man sørge for at de har samme nævner. Dette kan man gøre ved enten at forlænge eller forkorte dem.

Herefter følger man blot denne fremgangsmåde:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}$$

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a - b}{c}$$

Bemærk, at når vi adderer og subtraherer brøker, er det kun tællerne vi regner på.

1.7 Multiplikation og division med brøker

Multiplikation med brøker er ganske enkelt. Man ganger simpelthen tæller med tæller og nævner med nævner.

$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$$

Ved division med brøker ganger man med den omvendte brøk (hvor tæller og nævner har byttet plads).

Generelt skriver vi

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Vi kan også bruge ovenstående regel til at dividere en brøk med et heltal. F.eks. Dette kan vi generelt udtrykke som:

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c} \quad c \neq 0$$

1.8 Potenser

1.8.1 Oversigt

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ gange}}$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad , \quad b \neq 0$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad , \quad a \neq 0$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \quad , \quad a \neq 0$$

$$a^0 = 1, \quad a \neq 0$$

1.9 Kvadratrødder og andre rødder

Rødder er det omvendte af potenser. Feks. Kan vi sige

$$\sqrt{9} = 3 \quad \text{fordi} \quad 3^2 = 9$$

$$\sqrt[3]{125} = 5 \quad \text{fordi} \quad 5^3 = 125.$$

1.9.1 Regneregler for rødder

Vi omskriver nogle af potensregningerne, så vi også kan bruge dem med rødder.

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}.$$

2 Ligninger

2.0.1 Løsning af ligninger

Når vi skal løse ligninger, kan det være rart at bruge nogle tricks til at nå frem til det rigtige svar. Den metode, vi bruger hedder "ensbetydende ligninger". Det går simpelthen ud på at omforme den ligning, vi har stillet, samtidig med vi sørger for, at løsningen til den omformede ligning er de samme som til den oprindelige.

Når vi omformer ligninger, er det tilladt at lægge tal til eller trække tal fra, så længe man gør det på begge sider af lighedstegnet.

Det er også tilladt at gange eller dividere med et tal på begge sider af lighedstegnet. Dog må man hverken gange eller dividere med 0.

Mange ligninger kan vi løse udelukkende ved hjælp af disse simple omformningsregler.

$$3x + 4 = x + 3 \Leftrightarrow$$

$$3x + 4 - 4 = x + 3 - 4 \Leftrightarrow$$

$$3x - x = x - 1 - x \Leftrightarrow$$

$$2x = -1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow$$

$$x = -\frac{1}{2}.$$

2.0.2 Ligninger af højere grad

De ligninger, vi har set ovenfor, kaldes førstegradsligninger, fordi der ikke optræder nogen potenser af x . Graden af en ligning svarer til den højeste eksponent af x . F.eks. er

$$x^4 = 81$$

en fjerdegradsligning, og

$$2x^3 - 7 = 9$$

er en tredjegradsligning.

$$x^2 + 2x = 0$$

er en andengradsligning. Ligningen indeholder både et førstegradsled ($2x$) og et andengradsled (x^2), men så er det den højeste eksponent, der bestemmer hvilken grad, ligningen har.

2.1 To ligninger med to ubekendte

To ligninger, der vil blive anvendt i de følgende eksempler.

$$3x + 4y = 35$$

$$4x + 2y = 20.$$

2.1.1 Substitution

Substitutionsmetoden går ud på at isolere en af de ubekendte i en af ligningerne. Derpå kan man sætte dette udtryk ind i den anden ligning, og så har man kun en ubekendt tilbage. Lad os prøve at bruge metoden på ligningerne ovenfor. Vi tager udgangspunkt i den første ligning og isolerer y .

$$3x + 4y = 35 \Leftrightarrow$$

$$4y = 35 - 3x \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{35-3x}{4}.$$

Nu kan vi sætte dette udtryk for y ind i den anden ligning

$$4x + 2y = 20 \Leftrightarrow$$

$$4x + 2 \cdot \left(\frac{35-3x}{4}\right) = 20.$$

Nu er der kun én ubekendt tilbage (x), og vi løser ligningen på almindelig vis

$$4x + 2 \cdot \left(\frac{35-3x}{4}\right) = 20 \Leftrightarrow$$

$$4x + \frac{70-6x}{4} = 20 \Leftrightarrow$$

$$4x + \frac{70}{4} - \frac{6x}{4} = 20 \Leftrightarrow$$

$$\frac{5}{2}x + \frac{35}{2} = 20 \Leftrightarrow$$

$$\frac{5}{2}x = 20 - \frac{35}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{5}{2}x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow$$

$$x = 1.$$

Nu ved vi, at x skal være 1. Men vi mangler stadig at finde y . Heldigvis fandt vi jo tidligere frem til et udtryk for y , hvor vi nu kan indsætte vores værdi for x

$$y = \frac{35-3x}{4} \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{35-3 \cdot 1}{4} \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{32}{4} \Leftrightarrow$$

$$y = 8.$$

Vi kan prøve at sætte $x = 1$ og $y = 8$ i vores oprindelige ligninger for at tjekke, om det er det rigtige svar

$$3x + 4y = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 8 = 3 + 32 = 35$$

$$4x + 2y = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 8 = 4 + 16 = 20,$$

og det er det heldigvis.

2.1.2 Lige store koefficienters metode

Koefficienterne er de tal, der står foran x 'erne og y 'erne i en ligning. I denne metode omformer vi de to ligninger, så koefficienterne foran en af de to variable er ens. Derefter lægger vi de to ligninger sammen eller trækker dem fra hinanden. På den måde forsvinder den ene variable, og vi står tilbage med en almindelig ligning. Lad os prøve med eksemplet ovenfor.

$$3x + 4y = 35$$

$$4x + 2y = 20$$

Vi ganger den nederste ligning med 2 (det vil sige ganger med 2 på begge sider af lighedstegnet) for at opnå 4 som koefficient foran y .

$$2 \cdot (4x + 2y) = 2 \cdot 20 \Leftrightarrow$$

$$8x + 4y = 40.$$

Nu har vi de to ligninger:

$$3x + 4y = 35$$

$$8x + 4y = 40$$

Vi ser, at y har koefficienten 4 i begge ligninger. Nu trækker vi dem fra hinanden.

$$(3x + 4y) - (8x + 4y) = 35 - 40$$

Og ved at reducere lidt får vi

$$3x + 4y - 8x - 4y = 35 - 40 \Leftrightarrow$$

$$3x - 8x = -5 \Leftrightarrow$$

$$-5x = -5 \Leftrightarrow$$

$$x = 1.$$

Igen nåede vi altså frem til, at x er 1 kr. Nu finder vi y (prisen på en slikpose) ved at sætte vores x -værdi ind i en af de to oprindelige ligninger; vi bestemmer helt selv hvilken, fordi det ALTID vil give samme resultat. Vi tager den første

$$3x + 4y = 35 \Leftrightarrow$$

$$3 \cdot 1 + 4y = 35 \Leftrightarrow$$

$$4y = 35 - 3 \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{32}{4} = 8$$

2.1.3 Determinant-metoden

Determinant-metoden er i realiteten det samme som ”lige store koefficienters” metoden, men vi vil her stille ligningerne op i en bestemt orden og i en bestemt rækkefølge. I modsætning til de to foregående metoder vil vi her starte med to generelle ligninger da det illustrerer metoden bedre.

Vi starter med at opskrive de to generelle ligninger med to ubekendte x og y

$$a_1x + b_1y = c_1 \tag{1}$$

$$a_2x + b_2y = c_2. \tag{2}$$

$$\tag{3}$$

$$\tag{4}$$

$$\tag{5}$$

Her er $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ konstanter som vi i princippet kender, da vi får dem opgivet i det konkrete eksempel. Hvis vi f.eks. ser på eksemplet ovenfor med slikkepinde og slikposer så kan vi identificere

disse konstanter således

$$\begin{array}{rcccl} \overbrace{3}^{a_1} x + \overbrace{4}^{b_1} y & = & \overbrace{35}^{c_1} \\ \overbrace{4}^{a_2} x + \overbrace{2}^{b_2} y & = & \overbrace{20}^{c_2} . \end{array}$$

Hvis vi så benytter fremgangsmetoden fra ”lige store koefficienters” metoden kan vi gange alle led i den første ligning med a_2 samt alle led i den anden ligning med a_1 hvorved vi får følgende to ligninger (hvor vi også har samlet x ’erne alene på venstre side og resten på højre side af lighedstegnet)

(6)

$$a_1 a_2 x = a_2 c_1 - a_2 b_1 y \quad (7)$$

(8)

$$a_1 a_2 x = a_1 c_2 - a_1 b_2 y. \quad (9)$$

(10)

Nu kan vi se, at de to ligningers venstreside er ens, hvilket vil sige at højresiden af de to ligninger er lig det samme. Vi kan derfor sætte højresiden af den øverste ligning lig med højresiden af den nederste ligning hvorved vi får ligningen

(11)

$$a_2 c_1 - a_2 b_1 y = a_1 c_2 - a_1 b_2 y. \quad (12)$$

(13)

Vi kan nu samle alle leddene hvor y indgår på venstre siden og resten på højresiden

(14)

$$a_1 b_2 y - a_2 b_1 y = a_1 c_2 - a_2 c_1. \quad (15)$$

(16)

Så kan vi sætte y udenfor en parentes

(17)

$$y(a_1 b_2 - a_2 b_1) = a_1 c_2 - a_2 c_1, \quad (18)$$

(19)

og så dele med parentesen på begge sider af lighedstegnet hvorved vi får følgende udtryk for y

(20)

$$y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}. \quad (21)$$

(22)

Vi kan nu gennemgå samme beregninger for x , hvor vi i stedet for at gange ligningerne med hhv. a_1 og a_2 skulle gange med hhv. b_1 og b_2 . Gøres dette får man følgende udtryk for x

(23)

$$x = \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}. \quad (24)$$

(25)

Vi vil nu indføre to nye begreber; matrix og determinant. En matrix skrives matematisk som

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

og består af to rækker (der indeholder hhv. a_1 og b_1 samt a_2 og b_2) og to søjler (der indeholder hhv. a_1 og a_2 samt b_1 og b_2). Determinanten af en matrix betegner vi med bogstavet D og den beregnes på følgende måde

(26)

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1. \quad (27)$$

(28)

Bemærk at den firkantede parentes der før omsluttede vores matrix blev ændret til to lodrette streger. Dette er en ofte brugt metode til at visualisere om man taler om en matrix eller om determinanten af en matrix. Bemærk desuden at måden hvorpå vi beregnede determinanten af en matrix med 2 søjler og 2 rækker var ved at tage øverste venstre indgang (a_1) og gange med nederste højre indgang (b_2) hvorefter vi trækker nederste venstre indgang (a_2) ganget med øverste højre indgang (b_1) fra.

Betrager vi nu vores udtryk for x og y kan vi identificere determinanten D beregnet ovenfor som nævneren i begge udtryk. Vi er desuden i stand til at konstruere to nye matricer D_x og D_y på følgende måde

(29)

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 b_2 - c_2 b_1 \quad (30)$$

(31)

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1 \quad (32)$$

(33)

hvor vi kan identificere D_x som tælleren i udtrykket for x samt D_y som tælleren i y . Til sidst kan vi nu opskrive udtrykkene for x og y på følgende lette og overskuelige måde vha. ovenstående 3 determinanter

(34)

$$x = \frac{D_x}{D} \quad , \quad y = \frac{D_y}{D}. \quad (35)$$

(36)

2.2 Grafisk løsning af to ligninger med to ubekendte

I nogle tilfælde kan man løse to ligninger med to ubekendte ved brug af grafer. Vi starter med at isolere den ene variable i begge ligninger. Derefter tegner vi de to grafer ind i et koordinatsystem. Koordinatsættene til skæringspunktet/-erne er løsningen/-erne til ligningssystemet.

Lad os se på et eksempel. Vores ligninger er

$$y = 3x + 4$$

$$2x + y = 14.$$

Vi kan se at y allerede er isoleret i den første ligning. Så vi isolerer den blot i den anden ligning

$$2x + y = 14 \Leftrightarrow$$

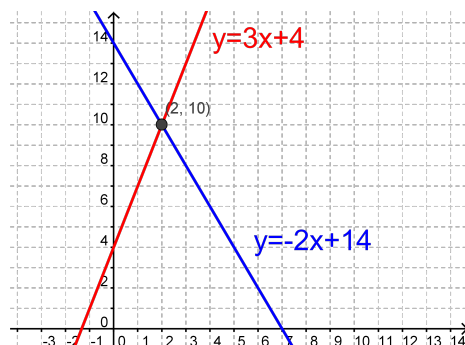
$$y = -2x + 14.$$

Nu tegner vi de to ligninger ind i et koordinatsystem

Vi kan se, at ligningerne har løsningen

$$x = 2, \quad y = 10$$

Vi prøver at sætte ind i de oprindelige ligninger for at sikre, at vi har regnet rigtigt. Indsættes



løsningen i første ligning ($y = 3x + 4$) får vi

$$V : 10 = 10$$

$$H : 3 \cdot 2 + 4 = 6 + 4 = 10.$$

samt for den anden ligning ($2x + y = 14$)

$$V : 2 \cdot 2 + 10 = 4 + 10 = 14$$

$$H : 14 = 14.$$

Lad os se på et andet eksempel. Vores ligninger er

$$2y + 2x = 2x^2$$

$$y - 2x = 0$$

Vi starter med at isolere y i den første ligning

$$2y + 2x = 2x^2 \Leftrightarrow$$

$$2y = 2x^2 - 2x \Leftrightarrow$$

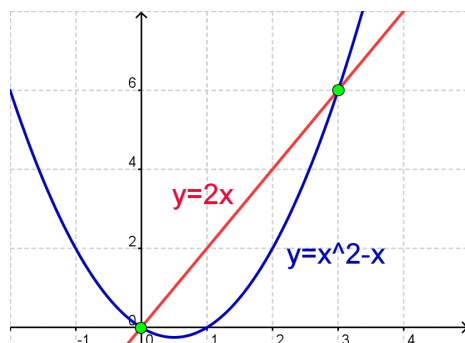
$$y = x^2 - x.$$

og så isolerer vi y i den anden ligning

$$y - 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$y = 2x.$$

Nu indtegner vi graferne i et koordinatsystem



Vi aflæser skæringspunkterne til $(0, 0)$ og $(3, 6)$. Dvs. at en løsning er $x = 0$ og $y = 0$, mens en anden løsning er $x = 3$ og $y = 6$. For at sikre os, at vi har aflæst rigtig, prøver vi at indsætte punkterne i de oprindelige ligninger.

Først tjekker vi at $(0, 0)$ er en løsning. For begge ligninger skal venstre og højre side af lighedstegnet give det samme

$$V: 2y + 2x = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$$

$$H: 2x^2 = 2 \cdot 0^2 = 2 \cdot 0 = 0.$$

og

$$V: y - 2x = 0 - 2 \cdot 0 = 0$$

$$H: 0 = 0.$$

Da venstre og højresiderne gav det samme i begge ligninger, er $x = 0$ og $y = 0$ en løsning. Nu ser vi på den anden løsning hvor $x = 3$ og $y = 6$

$$V: 2y + 2x = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 3 = 12 + 6 = 18$$

$$H: 2x^2 = 2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18$$

samt

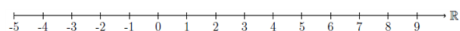
$$V: y - 2x = 6 - 2 \cdot 3 = 0$$

$$H: 0 = 0.$$

Igen får vi at højre- og venstresiderne stemmer overens i de to ligninger.

2.3 Numeriske ligninger

Numerisk værdi Når man arbejder med numeriske ligninger, bliver man nødt til at vide, hvad den ”numeriske værdi af et tal” betyder. Lad os betragte den reelle tal linje:



Tallene går fra $-\infty$ til $+\infty$, og 0 skiller de positive og negative tal fra hinanden. Den numeriske værdi af et tal er lig med tallets afstand fra 0. Sagt med andre ord: Den numeriske værdi af et tal er altid selve tallet selv med positivt fortegn.

Eksempler:

- Den numeriske værdi af tallet -4 er 4
- Den numeriske værdi af tallet -10 er 10
- Den numeriske værdi af tallet 5 er 5

I stedet for at skrive ”den numeriske værdi af tallet -4 ” kan man skrive ” $|-4|$ ” - det to lodrette streger betyder ”den numeriske værdi af”.

Vi kan derfor skrive $|-4| = 4$, $|-10| = 10$ og $|5| = 5$

Den numeriske værdi kan defineres på følgende måde:

Den numeriske værdi af x er lig med x hvis x er større end, eller lig med 0. Hvis derimod at x er mindre end 0 så er den numeriske værdi af x lig med $-x$.

Numeriske ligninger Løser man en ligning, hvor der indgår en numerisk værdi, bliver man nødt til at bruge denne definition. Når vi skal til at løse numeriske ligninger er vi nemlig nødt til at afgøre, hvilke værdier der er tilladte for x at antage. Dette interval af tilladte værdier for x kaldes senere hen for definitionsområdet for x . I modsætning til almindelige ligninger, kan numeriske ligninger have mere end 1 løsning. Lad os tage udgangspunkt i et par eksempler.

2.4 Andengradsligningen

En andengradsligning er en ligning på formen

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

Når man skal løse en andengradsligning, kan det være svært at isolere x , som vi er vant til fra almindelige førstegradsligninger. Derfor findes der en løsningsmetode til at finde x , når man har at gøre med en andengradsligning. Metoden er inddelt i to skridt.

Først skal man finde *diskriminanten*. Diskriminanten betegnes med bogstavet d . Diskriminanten fortæller os, hvor mange løsninger andengradsligningen har.

Hvis d er positiv ($d > 0$), har ligningen 2 løsninger.

Hvis $d = 0$, har ligningen 1 løsning.

Hvis d er negativ ($d < 0$), har ligningen ingen løsninger.

Man beregner diskriminanten ved formelen

$$d = b^2 - 4ac$$

Når vi skal finde løsningerne, bruger vi formlen

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$$

Tegnet efter $-b$ skal læses "plus minus", og det betyder, at vi finder den ene løsning ved at indsætte et plus, og den anden løsning ved at indsætte et minus.

2.5 Uligheder

Når man løser ligninger, har man en venstreside og en højreside, og imellem dem er placeret et lighedstegn, $=$. Når vi skal løse uligheder, er der fire forskellige ulighedstegn, vi skal holde styr på.

$x \leq y$ "x er mindre end eller lig med y"

$x \geq y$ "x er større end eller lig med y"

$x < y$ "x er mindre end y"

$x > y$ "x er større end y"

Hvis man er i tvivl om, hvad der betyder hvad, så kan man se ulighedstegnet som en krokodillemund, der altid vil spise den største værdi.

En ulighed består af en venstreside, en højreside og et af de fire ulighedstegn imellem.

2.5.1 Regneregler for uligheder

Når man skal løse en ulighed, så må man lægge til eller trække fra på begge sider af ulighedstegnet.

$$x + 5 < 8 \quad \Leftrightarrow \quad x < 8 - 5 \quad \Leftrightarrow \quad x < 3$$

Man må også godt gange eller dividere med et positivt tal.

$$4x \geq 100 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq \frac{100}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 25$$

Hvis man vil gange eller dividere med et *negativt* tal, så skal man vende ulighedstegnet om.

$$-5x > 35 \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{35}{-5} \quad \Leftrightarrow \quad x < -7$$

Når man løser uligheder, kan man ikke uden videre gange eller dividere med en ubekendt (f.eks. x). Man ved nemlig ikke, om den er positiv eller negativ, og derfor ved man ikke, om man skal vende ulighedstegnet eller ej.

2.5.2 Ulighedstegn og intervaller

Der er en sammenhæng mellem, om man bruger svagt eller skarpt ulighedstegn, og om man har med åbne eller lukkede intervaller at gøre.

$$\begin{aligned} 2 < x < 4 &\Leftrightarrow x \in]2; 4[\\ 2 \leq x \leq 4 &\Leftrightarrow x \in [2; 4] \\ x > 8 &\Leftrightarrow x \in]8; \infty[\\ x \geq 5 &\Leftrightarrow x \in [5; \infty[. \end{aligned}$$

Her er et par eksempler på løsning af uligheder.

$$3x + 17 < 5x - 8$$

Først rykker vi x 'erne hen på venstresiden og tallene hen på højresiden. Da vi bare lægger til og trækker fra, skal vi ikke vende ulighedstegnet

$$\begin{aligned} 3x - 5x &< -8 - 17 \Leftrightarrow \\ -2x &< -25. \end{aligned}$$

Nu dividerer vi med -2 på begge sider. Da -2 er negativt, betyder det, at vi skal vende ulighedstegnet

$$x > \frac{25}{2} = 12,5.$$

Nu er uligheden løst. Man kan også skrive løsningen som

$$x \in \left] \frac{25}{2}; \infty \right[.$$

En anden ulighed er

$$15x < 10x^2$$

Selvom, der står x 'er på begge sider, kan vi ikke dividere med x , da vi ikke ved om x er positivt eller negativt (eller evt. 0).

Derfor starter vi med at trække $10x^2$ fra på begge sider

$$15x - 10x^2 < 0$$

Nu sætter vi $10x$ udenfor en parentes

$$10x \cdot (1,5 - x) < 0$$

Nu har vi et produkt, der skal være negativt. Det betyder, at faktorerne skal have forskellige fortegn. Lad os undersøge for hvilke x -værdier dette gælder.

Når $x < 0$, så er $10x$ negativ, mens $1,5 - x$ er positiv. Derfor er deres produkt negativt.

Når $x = 0$, så er $10x = 0$ og så er produktet 0

Når $0 < x < 1,5$ er $10x$ positiv, og $1,5 - x$ er også positiv. Derved er deres produkt positivt.

Når $x = 1,5$ er $1,5 - x = 0$, og derved er produktet 0.

Når $x > 1,5$ er $10x$ positiv og $1,5 - x$ er negativ. Derved er deres produkt negativt.

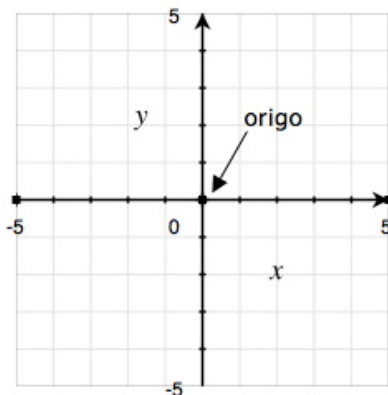
Svaret er de x -værdier, der giver et negativt produkt. Vi kan skrive det op på følgende måder:

$$x < 0 \quad \vee \quad x > 1,5 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]-\infty; 0[\cup]1,5; \infty[.$$

3 Funktioner

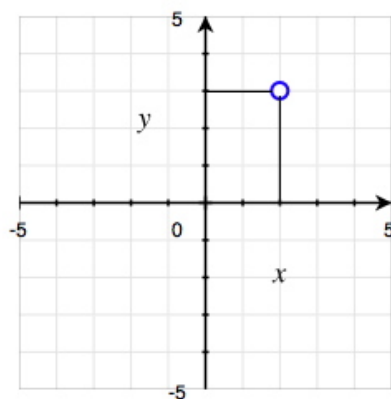
3.1 Koordinatsystemet

Et koordinatsystem er en to-dimensional tallinje. Dvs. to tallinjer, såkaldte akser, der står vinkelret på hinanden. Den, der går vandret, kaldes for det meste for x -aksen eller førsteaksen, mens den lodrette oftest kaldes y -aksen eller andenaksen. x -aksen og y -aksen skærer hinanden i deres respektive 0-punkter. Dette punkt kaldes *origo*.

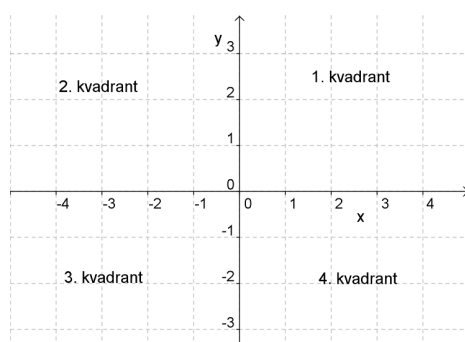


Hvis vi placerer et punkt i koordinatsystemet, kan vi aflæse dets koordinater. Dette gør vi ved at tegne vinkelrette linjer fra punktet til akserne.

Punktet, vi har indtegnet i ovenstående koordinatsystem, har 2 som x -koordinat og 3 som y -koordinat. Man skriver et koordinatsæt i en parentes (x, y) , hvor x -koordinaten altid står først, og y -koordinaten sidst. Man adskiller x - og y -koordinaten af et komma eller et semikolon. Punktet, som er indtegnet ovenfor, ville man skrive $(2, 3)$.



De fire områder i koordinatsystemer kaldes kvadranter.



De adskilles fra hinanden således.

1. kvadrant er både x og y positive
2. kvadrant er x negativ og y positiv
3. kvadrant er både x og y negative
4. kvadrant er x positiv og y negativ

3.2 Lineære funktioner

Generelt kan vi sige, at en lineær funktion er en funktion, der har forskriften

$$y = ax + b$$

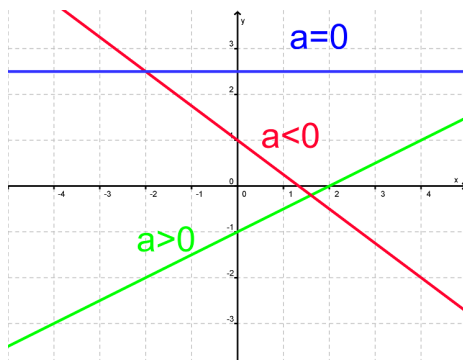
x og y er variable.

Tallet a kaldes hældningskoefficienten, og tallet b kaldes skæringspunktet med y-aksen.

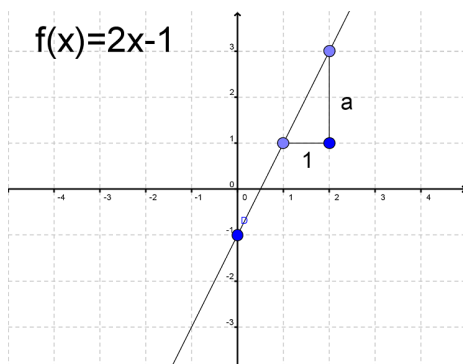
Hældningskoefficienten skal forstås som så meget, vores y-værdi vokser, hver gang vores x-værdi vokser med 1.

Hvis hældningskoefficienten er positiv vil funktionen altså vokse (så grafen starter nede til venstre og bevæger sig op mod højre), og hvis hældningskoefficienten er negativ, vil funktionen aftage (så grafen starter oppe til venstre og bevæger sig ned mod højre).

Hvis hældningskoefficienten er 0, vil funktionen hverken vokse eller aftage, og grafen vil således være parallel med x-aksen.



Da hældningskoefficienten bestemmes ud fra, hvor meget y vokser for hvert x, er det muligt at aflæse hældningskoefficienten på grafen ved (fra et valgfrit startpunkt) at gå 1 ud på x-aksen og se, hvor meget grafen bevæger sig opad.



På grafen ovenfor kan vi se, at man går 2 op, hver gang man bevæger sig 1 hen ad x-aksen. Derfor er $a=2$.

b er en konstant, der afgør, hvor grafen skærer y -aksen. Hvis b er positiv finder skæringen sted ovenfor origo, og hvis b er negativ er skæringen placeret under origo. Hvis $b=0$, skærer grafen y -aksen i origo. I dette tilfælde skriver man funktionen som $y=ax$, og vi kalder det for ligefrem proportionalitet.

På billedet ovenfor kan vi aflæse b ved at se hvor grafen skærer y -aksen. Denne skæring er i punktet $(0, -1)$. Derfor er $b = -1$.

Alle lineære funktioner har grafer, der er rette linjer. Man kan tegne grafen ud fra 2 punkter.

3.3 Find a og b (lineær)

Vi vil her gennemgå, hvordan man finder konstanterne a og b (hældningskoefficienten og skæringen med y -aksen), når man kender to punkter på grafen.

Lad os starte med at kalde de to punkter på grafen for hhv.

$$(x_1, y_1) \text{ og } (x_2, y_2)$$

Hvis vi kender koordinaterne til to punkter, kan vi beregne a ved hjælp af formelen

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Når vi først har fundet a , kan vi let finde b . Vi har to formler for at finde b .

$$b = y_1 - a \cdot x_1$$

$$b = y_2 - a \cdot x_2$$

3.4 Renteformlen

For en generel startkapital K_0 og en generel rente r er renteformlen således

$$K_n = K_0 \cdot (1 + r)^n$$

Man beregner altså, hvor stort beløbet er efter n *terminer*. (Termin er et ord lånt fra bankverdenen, hvor det betyder perioden mellem to rentetilskrivninger).

Det er også muligt at isolere de øvrige størrelser i renteformlen

$$K_0 = \frac{K_n}{(1 + r)^n}$$

$$r = -1 + \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}}$$

$$n = \frac{\log(K_n) - \log(K_0)}{\log(1 + r)}$$

Renteformlen er et eksempel på eksponentiel udvikling

3.5 Eksponentiel udvikling

Generelt er eksponentielle udviklinger på formen

$$y = b \cdot a^x, \quad a > 0$$

Vi har allerede set, at x og y er variable, hvor y -værdien afhænger af, hvilken x -værdi vi propper ind på højre side. y er altså den afhængige og x den uafhængige variabel.

Men hvad er så a og b ?

a er en konstant, der kaldes *fremskrivningsfaktoren*. Den fortæller noget om, hvor mange procent y vokser eller aftager med for hvert x . Hvis y vokser med r procent pr x har vi nemlig at

$$a = 1 + r$$

hvilket er det samme som at sige

$$r = a - 1$$

Hvis vi får at vide, at y vokser med 5 procent for hvert x , så er

$$a = 1 + r = 1 + 5\% = 1 + 0,05 = 1,05$$

Og hvis vi får at vide, at y aftager med 7 procent for hvert x , så er

$$a = 1 + r = 1 + (-7\%) = 1 - 0,07 = 0,93$$

Og hvis vi får at vide, at $a=1,23$, så kan vi finde r således

$$r = a - 1 = 1,23 - 1 = 0,23 = 23\%$$

Generelt kan vi sige, at

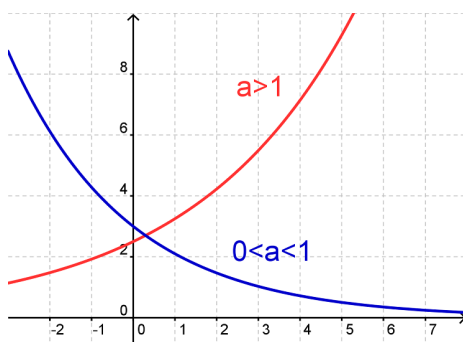
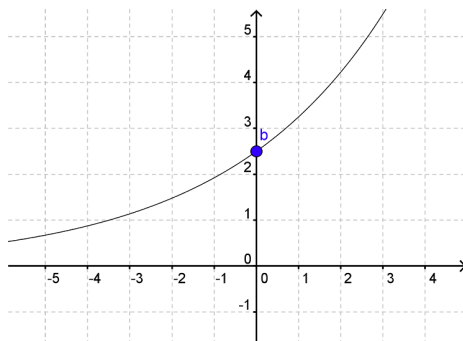
Hvis $a > 1$, så er udviklingen voksende

Hvis $0 < a < 1$, så er udviklingen aftagende.

På en graf kan vi aflæse b som skæringen med y -aksen.

I dette eksempel kan vi se, at $b=2,5$.

Man kan ikke på samme måde aflæse a ved at se på grafen. Dog kan man se, at hvis a er større end 1,



så vil grafen krænge opad, og hvis a er mindre end 1 (men større end nul), så vil grafen krænge nedad.

Bemærk, at grafen aldrig krydser x-aksen

3.5.1 Find x og y

Når vi kender x og ønsker at finde det tilhørende y , så kan vi bare indsætte x på højresiden og så se, hvilket y , der kommer ud.

Hvis vi derimod kender y og ønsker at finde ud af, hvilket x der hører til, så skal vi først have isoleret x . Til det skal vi bl.a. bruge [logaritmereglene](#).

$$y = b \cdot a^x$$

$$\frac{y}{b} = a^x$$

$$\log\left(\frac{y}{b}\right) = \log(a^x)$$

$$\log(y) - \log(b) = x \cdot \log(a)$$

$$\frac{\log(y) - \log(b)}{\log(a)} = x$$

Nu kan vi bestemme x ved formlen

$$x = \frac{\log(y) - \log(b)}{\log(a)}$$

3.6 Find a og b (eksponentiel)

Vi vil her gennemgå, hvordan man finder konstanterne a og b (fremskrivningsfaktoren og skæringen med y -aksen) for en eksponentiel funktion, når man kender to punkter på grafen.

Lad os starte med at kalde de to punkter på grafen for hhv.

$$(x_1, y_1) \text{ og } (x_2, y_2)$$

Først finder vi fremskrivningsfaktoren. Den findes ved hjælp af formlen

$$a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}}$$

Når vi kender fremskrivningsfaktoren, finder vi skæringen med y -aksen ved at isolere b i en af de to ligninger:

$$y_1 = b \cdot a^{x_1}$$

$$y_2 = b \cdot a^{x_2}$$

Dvs

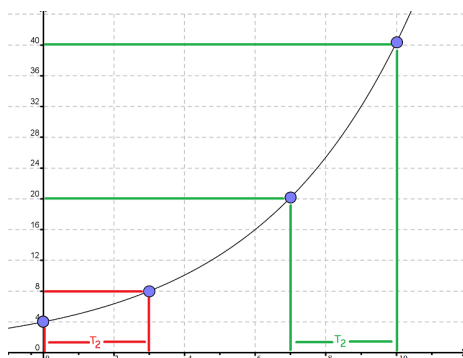
$$b = \frac{y_1}{a^{x_1}}$$

$$b = \frac{y_2}{a^{x_2}}$$

3.7 Fordoblings- og halveringskonstant

Når man har at gøre med en voksende eksponentiel funktion, så vil den vokse med en fast procent pr enhed på x -aksen. Efter et vist antal x -enheder vil den være vokset med 100% - dvs. den er fordoblet. Det stykke vi skal gå ud ad x -aksen, før funktionsværdien er fordoblet, kalder vi fordoblingskonstanten. Denne betegnes med T_2

Grunden til, at der er tale om en konstant, er, at da udviklingen sker med en vis procent, så er det ligegyldigt, hvorhenne vi starter, da der stadig skal et lige langt stykke x-akse til at nå op på 100%. Det kan virke lidt abstrakt, men prøv at se på følgende billede. Her er fordoblingskonstanten 3. Når vi går fra 0 til 3 på x-aksen, bliver y-værdien fordoblet (fra 4 til 8). Når vi går fra 7 til 10 på x-aksen bliver y-værdien imidlertid også fordoblet (fra 20 til 40).



Generelt lyder

spørgsmålet: hvor mange gange skal man gange a med sig selv for at få 2? Eller udtrykt matematisk:

$$a^{T_2} = 2$$

For at finde T_2 bruger vi [logaritmeregnerne](#)

$$\log(a^{T_2}) = \log(2)$$

$$T_2 \cdot \log(a) = \log(2)$$

$$T_2 = \frac{\log(2)}{\log(a)}$$

Altså kan vi finde fordoblingskonstanten ved formlen

$$T_2 = \frac{\log(2)}{\log(a)}$$

3.7.1 Halveringskonstant

Ligesom de voksende eksponentialfunktioner har en fordoblingskonstant, så har de aftagende eksponentialfunktioner en halveringskonstant. Denne betegnes med $T_{\frac{1}{2}}$

$$T_{1/2} = \frac{\log(0,5)}{\log(a)}$$

Ligesom der fandtes en formel for fordoblingskonstanten, findes der også en for halveringskonstanten. Her stiller man sig selv spørgsmålet ”hvor mange gange skal jeg gange a med sig selv for at få $\frac{1}{2}$?”.

$$a^{T_{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}$$

Løsningen på denne ligning findes på samme måde som ved fordoblingskonstanten og er

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\log(\frac{1}{2})}{\log(a)}$$

Da eksponentialfunktioner ofte har at gøre med udvikling over tid, så kalder man til tider også fordoblingskonstanten for fordoblingstiden og halveringskonstanten for halveringstiden.

3.8 Potensfunktioner

Den tredje vigtige type funktion (udover lineære og eksponentielle) er potensfunktionerne.

Den generelle forskrift for en potensfunktion er

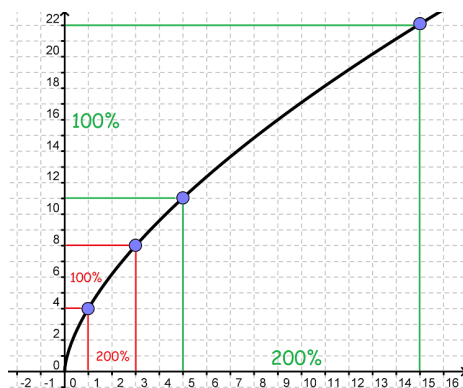
$$y = b \cdot x^a$$

Den hedder en potensfunktion, fordi den består af en potens (x^a) med fast eksponent (a) og variabelt grundtal (x). Derudover er der en koefficient, b , der ganges på.

Potensfunktionen har den egenskab, at når x -værdien stiger med en fast procent, så stiger y -værdien også med en fast procent. Under tiden kaldes potensfunktioner også procent-procent-vækst.

Det betyder med andre ord, at når vi ganger vores x -værdi med et tal, k , så skal vi gange vores y -værdi med k^a .

Læg mærke til, hvordan det adskiller sig fra eksponentialfunktionen, hvor y steg med en vis procent, når x steg med et tal. I potensvæksten skal x stige med en procent og ikke et tal, før y stiger med en bestemt procent.



Vi kan se på grafen, at når x vokser med 200

Når $x=1$, og vi stiger 200%, er vi oppe på 3. Og y er steget med 100% (fra 4 til 8)

Når $x=5$, og vi stiger med 200%, er vi oppe på 15. Og y er steget med 100% (fra 11 til 22).

Lige meget hvor vi starter, vil en forøgelse på 200

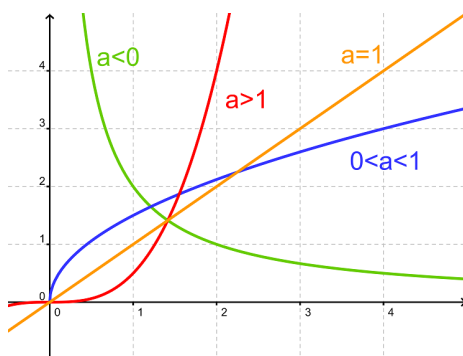
Man kan også udtrykke det på en anden måde.

Hvis vi fremskriver en x -værdi med faktoren F_x så fremskrives y -værdien med faktoren F_y , og sammenhængen mellem de to faktorer er

$$F_y = F_x^a \Leftrightarrow F_x = \sqrt[a]{F_y}$$

3.8.1 Betydningen af a

I modsætning til de to andre funktionstyper, kan grafen for potensfunktioner se meget forskellige ud. Udseendet afhænger i høj grad af, hvilken værdi a har.



Vi ser, at hvis a er mindre end 0, vil grafen starte højt oppe og smygge sig ned langs y -aksen for så at nærme sig 0 og så smygge sig henad x -aksen. Bemærk, at den aldrig krydser nogen af akserne! Funktionen er altså aftagende.

Hvis a er 0, er funktionen konstant med $y=b$.

Hvis a ligger mellem 0 og 1, vil vi have en voksende graf, som flader mere og mere ud.

Hvis a er 1, har vi en ret linje (med hældning b). Og sidst men ikke mindst: hvis a er større end 1, har vi en graf, der vokser og bliver mere og mere stejl.

Når a ligger mellem 0 og 1, er potensfunktionen faktisk også en "rodfunktion". Som eks. Er

$$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

(se evt. afsnittet om kvadratrødder og andre rødder).

Derfor vil en funktion som

$$y = 5x^{\frac{1}{3}}$$

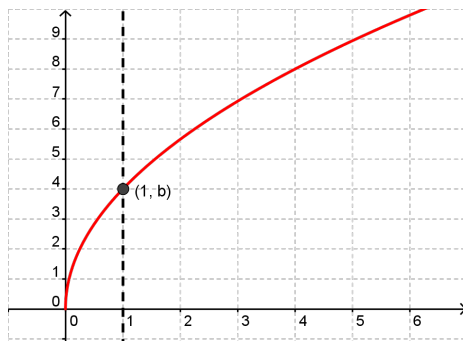
være det samme som

$$y = 5 \cdot \sqrt[3]{x}$$

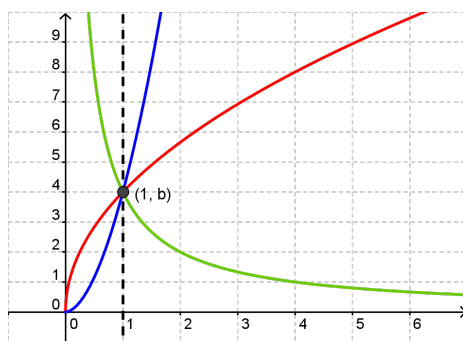
3.8.2 Betydning af b

Ovenfor har vi set, hvad tallet a betyder for grafens udseende.

Imidlertid siger tallet b også noget om, hvordan grafen ser ud. Det er nemlig den værdi, der er på y-aksen, når x er 1. For at aflæse b ud fra en graf skal man altså gå ud ad x-aksen til man støder på 1, og derefter gå op ad y-aksen, til man støder på grafen; y-værdien i dette punkt er så b.



Her ser vi forskellige potensfunktioner med samme b-værdi (men vidt forskellige a-værdier).



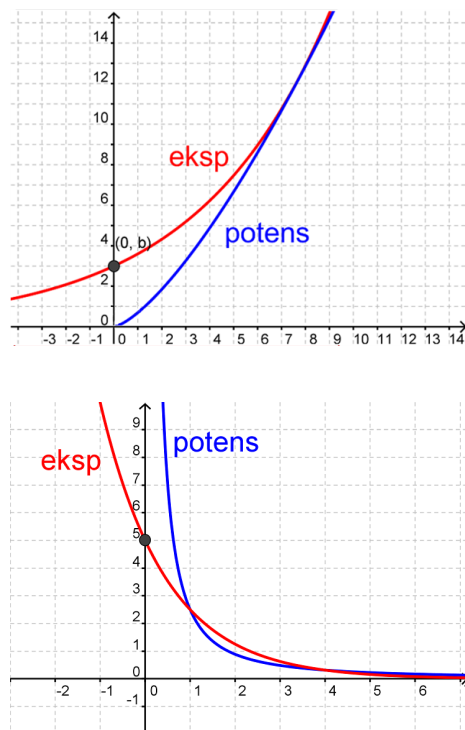
3.8.3 Grafen

Nogle gange kan grafen for en potensfunktion ligne grafen for en eksponentialfunktion til forveksling. Imidlertid er der nogle tommelfingerregler, så man kan kende forskel.

Når a er større end 1, ligner grafer en voksende eksponentialfunktion. Der hvor de adskiller sig er, at grafen for en eksponentialfunktion vil skære y-aksen i punktet $(0, b)$, mens potensfunktionens graf kommer uendeligt tæt på origo $(0, 0)$, men aldrig helt vil skære y-aksen (selvom det på grafen ser sådan ud), fordi potensfunktionen kun er defineret for positive reelle tal.

Man kan også komme til at forveksle grafen for en potensfunktion med a mindre end 0 med aftagende eksponentialfunktioner.

Her skal vi igen huske, at en aftagende eksponentialfunktion skærer y-aksen i punktet $(0, b)$, mens en potensfunktion med a mindre end 0 *aldrig skærer y-aksen*.



Hvis man har nogle punkter og vil finde ud af, om de tilhører en eksponentiel eller potensvækst, kan man tegne dem ind i forskellige koordinatsystemer.

En potensfunktion vil danne en ret linje i et *dobbeltlogaritmisk koordinatsystem*, mens en eksponentialfunktion vil danne en ret linje i et *enkeltlogaritmisk* (semilogaritmisk) koordinatsystem.

3.8.4 Find x og y

I en potensfunktion er y en funktion af x. Hvis vi kender x, kan vi altså sætte det ind på højre side og så finde ud af, hvad det tilhørende y er.

Hvis vi derimod kender y og gerne vil bestemme x, skal vi først have isoleret x i udtrykket.

$$y = b \cdot x^a$$

$$\frac{y}{b} = x^a$$

$$\sqrt[a]{\frac{y}{b}} = x$$

Vi kan altså finde x ved formlen

$$x = \sqrt[a]{\frac{y}{b}}$$

3.9 Find a og b (potens)

Vi vil her gennemgå, hvordan man finder konstanterne a og b (eksponenten og skæringen med linjen $x=1$) for en potensfunktion, når man kender to punkter på grafen.

Lad os starte med at kalde de to punkter på grafen for hhv.

$$(x_1, y_1) \text{ og } (x_2, y_2)$$

Først finder vi a. Den findes ved hjælp af formlen

$$a = \frac{\log(y_2) - \log(y_1)}{\log(x_2) - \log(x_1)}$$

Når vi har fundet a, kan vi finde b. Vi indsætter punkterne i forskriften for potensfunktionen og isolerer b. Det giver os to formler for b, og vi vælger selv, hvilken vi vil bruge.

$$y_1 = b \cdot x_1^a \Leftrightarrow b = \frac{y_1}{x_1^a} \quad y_2 = b \cdot x_2^a \Leftrightarrow b = \frac{y_2}{x_2^a}$$

3.10 Logaritmer

Generelt:

$$\text{Hvis } y = 10^x \text{ så er } \log(y) = x$$

eller sagt på en anden måde

$$\log(10^x) = x$$

Med ord ville man sige

Logaritmen til et positivt tal er den eksponent, 10 skal opløftes til for at give tallet.

Her er nogle eksempler på, hvordan vi finder logaritmen til nogle tal.

$$\log(1000) = 3 \quad \text{fordi} \quad 10^3 = 1000$$

$$\log(1) = 0 \quad \text{fordi} \quad 10^0 = 1$$

$$\log(0,01) = -2 \quad \text{fordi} \quad 10^{-2} = 0,01$$

Og her ser vi, hvordan vi finder logaritmen til de første par naturlige tal.

$$\log(1) = 0 \quad \text{fordi} \quad 10^0 = 1$$

$$\log(2) = 0,301 \quad \text{fordi} \quad 10^{0,301} = 2$$

Ligesom vi så at

$$\log(10^x) = x$$

kan vi også vende det om og se at

$$10^{\log(x)} = x$$

3.10.1 Logaritmeregneregler

Når vi regner med logaritmer, er der nogle vigtige regneregler.

$$1. \quad \log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$$

$$2. \quad \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

$$3. \quad \log(a^x) = x \cdot \log(a)$$

Med ord kan vi sige

1. logaritmer oversætter gange til plus
2. logaritmer oversætter dividere til minus
3. når man tager logaritmen til en potens, må man rykke eksponenten ned foran.

3.10.2 Den naturlige logaritme og andre logaritmer

Den almindelige logaritme kaldes ofte for 10tals-logaritmen. Dette skyldes, at man jo skal se, hvilken eksponent man skal opløfte 10 til for at få tallet. Vi siger, at 10 er grundtallet. Men man kan også forestille sig logaritmer med andre grundtal.

En af de mest anvendte er *Den Naturlige Logaritme*. Denne betegnes ofte med $\ln$. Grundtallet i den naturlige logaritme er Eulers tal.

$$e \approx 2,71828$$

For den naturlige logaritme gælder altså

$$\text{Hvis } y = e^x \text{ så er } \ln(y) = x$$

eller sagt på en anden måde

$$\ln(e^x) = x$$

$$e^{\ln(x)} = x$$

Man kan også bruge andre grundtal end 10 og e. I disse tilfælde markerer man hvilket grundtal man bruger ved at skrive det med sænket skrift efter log. F.eks. ville man skrive 2tals-logaritmen således:

$$\text{Hvis } y = 2^x \text{ så er } \log_2(y) = x$$

Man kan gøre det helt generelt med at skrive

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a(y) = x$$

Med den her notation kunne man skrive den almindelige 10tals-logaritme som

$$\log_{10}(x)$$

hvilket man også under tiden gør.

Den naturlige logaritme kunne også skrives

$$\log_e(x)$$

men det gør man ikke, fordi den naturlige logaritme jo har fået sin egen betegnelse $\ln(x)$

BEMÆRK: logaritmeregnereglerne gælder for alle logaritmer uanset grundtallet!

$$1. \quad \log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$2. \quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$3. \quad \log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x)$$